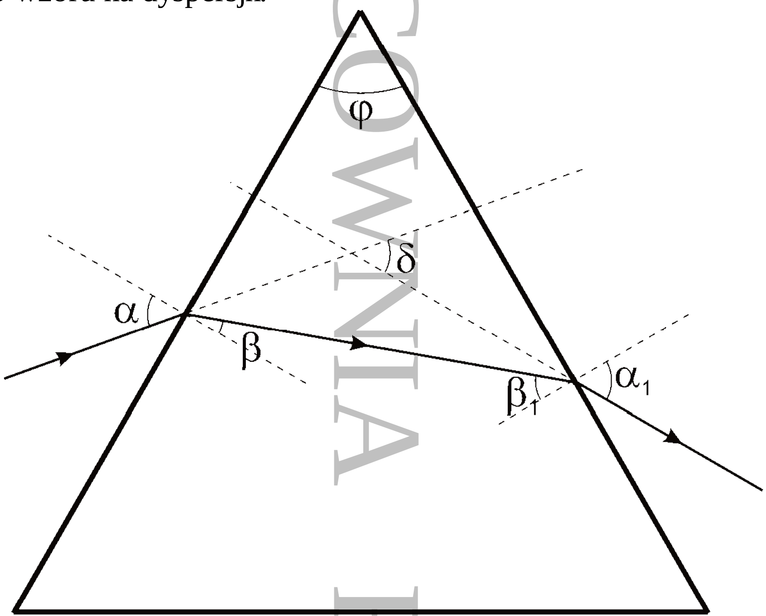
Analiza danych - ćwiczenie O10

Proszę o rozważenie zmiany analizy danych z ćwiczenia O10. Opisana poniżej propozycja oparta jest na założeniach fizycznych i nie wymaga zgadywania jakiej postaci jest krzywa dyspersji. Dodatkowo pozwala zlinearyzować problem wyznaczania krzywej dyspersji. Umożliwia to studentom zastosowanie standardowych metod regresji liniowej. Dzięki temu w analizie studenci mogą korzystać ze standardowych programów np. Excel. Standardowa metoda regresji liniowej pozwala także na łatwe znalezienie niepewności dla wyznaczanych długości fali "nieznanej" lampy. Poniżej przedstawiam metodę linearyzacji problemu z dość dokładnymi przeliczeniami. Dalsze kroki analizy są takie jak do tej pory, tylko korzysta się z wyprowadzonego wzoru na dyspersję.



Dla przedstawionych na rysunku zależności można znaleźć relację pomiędzy kątami i współczynnikiem załamania pryzmatu

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}. \tag{1}$$

Korzystając z rysunku można łatwo znaleźć relacje pomiędzy kątami

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\alpha_1 - \beta_1), \tag{2}$$

$$\varphi = \beta + \beta_1, \tag{3}$$

$$\delta = \alpha - \beta + \alpha_1 - \phi + \beta = \alpha + \alpha_1 - \varphi . \tag{4}$$

Podstawiając te związki do pierwszego równania otrzymujemy

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\delta + \varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{\sin\delta\,\cos(\varphi - \alpha) + \cos\delta\,\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)}. \tag{5}$$

Kąt odchylenia δ dla zadanej długości fali można wyrazić przez kąt najmniejszego odchylenia δ_m oraz pewien kąt γ

$$\delta = \delta_m + \gamma \,. \tag{6}$$

Jeżeli kąt γ jest mały to możemy skorzystać z rozwinięcia w szereg

$$\sin(\delta_m + \gamma) = \sin\delta_m + \gamma\cos\delta_m \,, \tag{7}$$

$$\cos(\delta_m + \gamma) = \cos\delta_m - \gamma\sin\delta_m \,. \tag{8}$$

Korzystając z tych wyrażeń możemy licznik we wzorze 5 przepisać w postaci

$$\begin{aligned} &\sin\delta\cos(\varphi-\alpha) + \cos\delta\sin(\varphi-\alpha) = \\ &\sin\delta_m\cos(\varphi-\alpha) + \cos\delta_m\sin(\varphi-\alpha) + \gamma\left[\cos\delta_m\cos(\varphi-\alpha) - \sin\delta_m\sin(\varphi-\alpha)\right]' \end{aligned} \tag{9}$$

Ostatecznie można powiązać współczynnik załamania z kątem odchylenia γ mierzonym względem kąta najmniejszego odchylenia

$$n = A + B\gamma \,, \tag{10}$$

gdzie stałe A i B wyrażają się przez odpowiednie funkcje trygonometryczne kątów. Nie wypisuję tej zależności ponieważ nie jest ona potrzebna do dalszej analizy. Ważne jest tylko iż współczynnik załamania jest teraz liniową funkcją γ. W przybliżeniu małych kątów położenie prążka na skali spektrometru x jest proporcjonalne do kąta γ. Ostatecznie otrzymujemy iż współczynnik załamania jest liniową funkcją położenia linii odczytywaną na skali spektrometru.

$$n = A_1 + B_1 x \,. \tag{11}$$

Korzystamy teraz z przybliżonego wzoru Cauchy'ego na zależność współczynnika załamania od długości fali λ (proszę zauważyć iż w skrypcie wzór 4.11.2 jest zapisany z błędem)

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} \,. \tag{12}$$

Łącząc ze sobą wzory 10 i 11 otrzymujemy zależność położenia linii od odpowiadającej jej długości fali

$$\frac{1}{\lambda^2} = c + dx \,. \tag{13}$$

Można teraz wyniki pomiarów przedstawić na wykresie zależność $1/\lambda^2$ w funkcji x. Do takich danych można dopasować linię prostą korzystając z regresji liniowej. Mając współczynniki c i d z regresji wraz z ich niepewnościami można obliczyć długość fali dla "nieznanej" lampy wraz z ich niepewnościami.