

Temperaturowa zależność oporu przewodników. Opór zastępczy układu oporników.

Celem ćwiczenia jest zbadanie temperaturowej zależności oporu i wyznaczenie temperaturowego współczynnika oporu właściwego α dla kilku różnych przewodników. W temperaturze pokojowej wykonywany jest również pomiar oporu zastępczego szeregowego i równoległego połączenia oporników i porównanie wyników z przewidywaniami teoretycznymi. Pomiar oporu prowadzony jest metodą równoważenia mostka Wheatstone'a.

Zagadnienia do przygotowania:

- Przewodnictwo ciał stałych, zależność oporu przewodnika od temperatury
- I i II prawo Ohma,
- I i II prawo Kirchhoffa,
- opór zastępczy szeregowego i równoległego połączenia oporników
- pomiar oporu elektrycznego za pomocą mostka Wheatstone'a.

Literatura podstawowa: [1], [2], [15], [45].

1. Podstawowe pojęcia i definicje

Opór elektryczny i prawa Ohma

Opór elektryczny jest zasadniczą cechą materiałową, decydującą o natężeniu prądu, jaki przepłynie przez element układu elektrycznego wykonany z danej substancji, gdy do końców tego elementu przyłożymy różnicę potencjałów U .

Pierwsze prawo Ohma mówi, że natężenie prądu stałego I płynącego przez przewodnik jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia U (różnicy potencjałów pomiędzy końcami przewodnika), a współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność oporu R (jednostka $\Omega = \text{V/A}$). Matematycznie można to zapisać w następującej postaci:

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (1)$$

Drugie prawo Ohma wiąże opór przewodnika z jego wymiarami geometrycznymi (tj. długością przewodnika l i powierzchnią jego przekroju poprzecznego S) oraz własnościami fizycznymi materiału, z jakiego jest wykonany. Matematycznie przedstawia to równanie:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2)$$

gdzie współczynnikiem proporcjonalności ρ jest opór właściwy, który jest stałą materiałową charakteryzującą daną substancję. Dla metali w temperaturze 0°C jest on rzędu $10^{-8} \Omega\text{m}$.

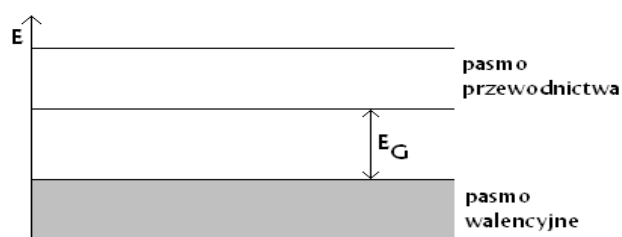
Przewodnictwo ciał stałych

Własności elektronów w ciałach stałych wynikają z ich oddziaływań między sobą oraz oddziaływań z atomami (jonami) sieci krystalicznej. Mimo sukcesów podejścia półempirycznego i klasycznej teorii przewodnictwa należy zdawać sobie sprawę z tego, że wiele zagadnień związanych z przewodnictwem może być wyjaśnionych tylko na gruncie kwantowej teorii ciał stałych, umożliwiającej poprawny opis uporządkowanego transportu nośników ładunku elektrycznego oraz różnic pomiędzy przewodnikami, izolatorami i półprzewodnikami.

Do opisu elektronów w sieci krystalicznej stosuje się dwa przybliżenia: przybliżenie elektronów prawie swobodnych i przybliżenie elektronów silnie związanych (silnie skorelowanych). W obu przypadkach otrzymujemy pewne przedziały energii dozwolone dla elektronów, które nazywamy pasmami energetycznymi oraz przedziały energii zabronione dla elektronów, nazywane przerwami energetycznymi. To właśnie ich szerokość i wzajemne położenie determinują podział materiałów na przewodniki, półprzewodniki i izolatory.

Pasma energetyczne stanowi układ dyskretnych, leżących bardzo blisko siebie podpoziomów energetycznych. Dla pojedynczego atomu odległość między poziomami energetycznymi jest rzędu 1eV, natomiast dla 1 mola substancji (w warunkach normalnych) odległości te zmniejszają się do około 10^{-20} eV i można przyjąć, iż tworzą one ciągłe widmo energetyczne. Szerokości tych pasm i ich odległości względem siebie na skali energii zależą tylko od odległości między atomami w sieci.

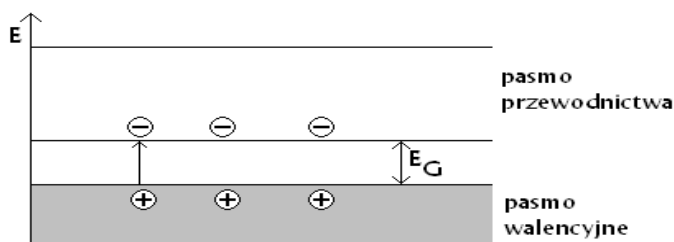
W przewodnictwie ciał stałych najważniejszą rolę odgrywają dwa pasma energetyczne: pasmo podstawowe (walencyjne), które odpowiada elektronom pochodzącym z zewnętrznych (walencyjnych) powłok atomowych i najbliższe pasmo stanów wzbudzonych tych elektronów, które nazywamy pasmem przewodnictwa. Pasma walencyjne i pasmo przewodnictwa są oddzielone pasmem energii wzbronionych.



Rysunek 1. Schematyczne przedstawienie poziomów energetycznych w izolatorze. Całkowicie wypełnione pasmo walencyjne oraz duża wartość przerwy energetycznej E_G uniemożliwiają przewodnictwo.

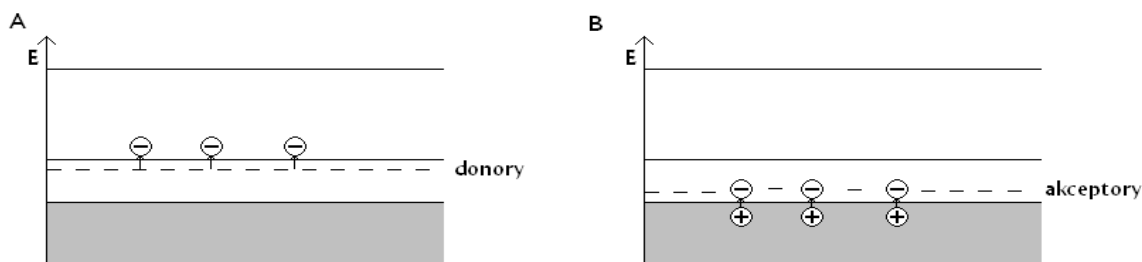
Jeżeli najwyżej położone pasmo jest całkowicie wypełnione (rys. 1), to substancja nie przewodzi prądu elektrycznego, jest więc izolatorem. Aby przepływ prądu elektrycznego był możliwy to elektrony, uzyskujące dodatkową energię pod wpływem pola elektrycznego, musiałyby przejść na wyżej położony poziom w paśmie przewodnictwa. Jednakże prawdopodobieństwo przejścia elektronu z całkowicie wypełnionego pasma walencyjnego do wyższego (pustego) pasma przewodnictwa jest niezmiernie małe, gdyż przerwa energetyczna E_G w izolatorach wynosi zwykle kilka eV (dla diamentu ok. 6 eV).

Struktura pasmowa półprzewodników jest podobna do struktury pasmowej izolatorów, z tym, że przerwa energetyczna E_G jest rzędu elektronowolta (np. 0,7eV dla germanu lub 1,1eV dla krzemu). Ze wzrostem temperatury elektrony mogą z większym prawdopodobieństwem przejść do pasma przewodnictwa, umożliwiając (podobnie jak w metalach) przepływ prądu elektrycznego. W paśmie walencyjnym powstają wówczas nieobsadzone stany tzw. dziury (rys. 2), które stają się nośnikami dodatniego ładunku elektrycznego.



Rysunek 2. Schemat poziomów energetycznych w półprzewodniku samoistnym. Wartość przerwy energetycznej E_G jest znacznie mniejsza niż dla izolatorów, a więc elektrony termiczne mogą przeskoczyć z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa pozostawiając w paśmie przewodnictwa dodatnio naładowane dziury.

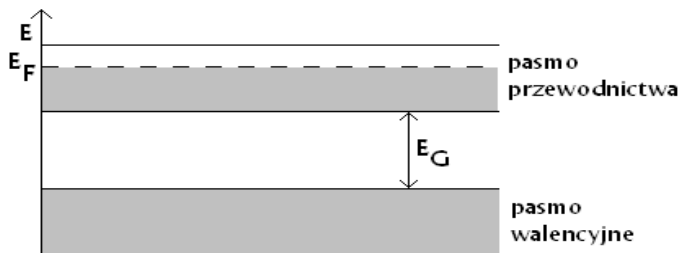
Przewodnictwo elektryczne w półprzewodniku jest związane z przemieszczaniem się elektronów w paśmie przewodnictwa oraz dziur w paśmie walencyjnym. Przewodnictwo można zwiększyć poprzez wprowadzenie tzw. domieszek donorowych lub akceptorowych. Wprowadzając do krzemu (półprzewodnik samoistny, 4-ry elektrony walencyjne, 14-ta grupa w układzie okresowym) pierwiastek posiadający 5 elektronów walencyjnych (np. fosfor; z 15-tej grupy układu okresowego) generujemy w strukturze energetycznej dodatkowe podpoziomy donorowe pod pasmem przewodnictwa. Tak otrzymany półprzewodnik nazywamy półprzewodnikiem typu n (od ang. *negative* – ujemny). Podobnie domieszkując kryształ krzemu pierwiastkami posiadającymi 3 elektrony walencyjne (z 13-tej grupy układu okresowego) generujemy stany akceptorowe tuż nad pasmem walencyjnym, a otrzymany półprzewodnik nosi nazwę typu p (od ang. *positive* – dodatni) (rys. 3).



Rysunek 3. Poziomy A) donorowe w półprzewodniku typu n i B) akceptorowe w półprzewodniku typu p.

W metalach pasmo przewodnictwa jest tylko częściowo wypełnione przez elektrony (rys 4). Dzięki temu metale są dobrymi przewodnikami prądu elektrycznego.

Rysunek 4. Schematyczne przedstawienie poziomów energetycznych w metalu. Pasma walencyjne jest częściowo zapełnione. E_F (energia Fermiego) - energia najwyższego poziomu zajętego przez elektrony jest liczona jest od dna pasma przewodnictwa.



Zależność oporu przewodnika od temperatury

Zgodnie z klasyczną teorią przewodnictwa (sformułowaną w XIX wieku przez Drudego i Lorentza) przewodniki charakteryzują się bardzo dużą koncentracją elektronów swobodnych stanowiących gaz elektronowy. W nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego elektrony te są w bezustannym chaotycznym ruchu. Jeżeli między końcami przewodnika wytworzymy różnicę potencjałów U , to pojawi się dodatkowa składowa prędkości elektronów (przeciwnie skierowana do wektora pola elektrycznego), w wyniku czego gaz elektronowy dryfuje, dając przepływ prądu elektrycznego. Ruch elektronów swobodnych hamowany jest głównie przez oddziaływania z siecią krystaliczną, na dwa sposoby: poprzez rozpraszanie na fononach, dominujące w temperaturach wyższych od 100 K (tzw. opór fononowy) oraz rozpraszanie na domieszkach i defektach sieci krystalicznej (tzw. opór resztkowy), dominujące w temperaturach niższych. Ze wzrostem temperatury rosną amplitudy drgań atomów sieci krystalicznej wokół położenia równowagi. W wyniku tego maleje średnia droga swobodna elektronów (droga przebywana pomiędzy kolejnymi aktami rozproszenia), a w konsekwencji rośnie opór właściwy ρ . Dla przewodników zależność oporu właściwego od temperatury T jest w przybliżeniu zależnością liniową, którą można opisać wzorem empirycznym:

$$\rho_T - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \quad (3)$$

gdzie α jest temperaturowym współczynnikiem oporu właściwego, T_0 temperaturą odniesienia (zazwyczaj 293K, czyli 20°C), ρ_0 oporem właściwym w temperaturze T_0 , a ρ_T oporem właściwym w temperaturze T . Ponieważ bezpośrednio mierzoną wielkością jest opór R , to korzystając ze wzoru (2) można wzór (3) przekształcić do postaci:

$$R_T = R_0 + R_0\alpha(T - T_0), \quad (4)$$

gdzie R_0 i R_T są oporem przewodnika w temperaturze T_0 i T , odpowiednio. Stąd temperaturowy współczynnik oporu właściwego w tym przybliżeniu można znaleźć jako:

$$\alpha = \frac{R_T - R_0}{R_0(T - T_0)}, \quad (5)$$

Obwody elektryczne proste (o jednym oczku) i złożone (o wielu oczkach)

Pierwsze prawo Kirchhoffa

Pierwsze prawo Kirchhoffa (znane również jako bilans natężeń prądów w węźle) jest konsekwencją zasady zachowania ładunku elektrycznego. Mówi ono, że algebraiczna suma natężeń prądów wpływających do węzła sieci elektrycznej i prądów z niego wypływających jest równa zero. Prądy wpływające poprzedza się znakiem plus, a prądy wypływające znakiem minus. Matematycznie I prawo Kirchhoffa można zapisać w postaci:

$$\sum_i I_i = 0, \quad (6)$$

Drugie prawo Kirchhoffa

Drugie prawo Kirchhoffa (znane również, jako bilans napięć w zamkniętym obwodzie elektrycznym - oczku sieci) jest konsekwencją zasady zachowania energii. Zdefiniujmy najpierw kilka pojęć pomocniczych. Siła elektromotoryczna to jeden z najważniejszych parametrów charakteryzujących źródła energii elektrycznej (zwanymi źródłami siły elektromotorycznej; są nimi m. in. baterie). W literaturze siła elektromotoryczna oznaczana jest jako SEM lub jako pisana wielka litera ε , a jej jednostką jest wolt. Oczko sieci elektrycznej jest to zamknięta część obwodu elektrycznego (czasem cały obwód).

Drugie prawo Kirchhoffa mówi, że suma wartości chwilowych sił elektromotorycznych występujących w oczku sieci równa się sumie wartości chwilowych spadków napięć na elementach pasywnych (np. opornikach) tego obwodu. Matematycznie II prawo Kirchhoffa można zapisać jako:

$$\sum_i SEM_i = \sum_j U_j, \quad (8)$$

Aby zapisać drugie prawo Kirchhoffa dla danego oczka sieci należy najpierw ustalić kierunek obchodzenia tego oczka. Jeżeli obchodząc oczko zgodnie z ruchem wskazówek zegara napotykamy źródło siły elektromotorycznej i mijamy go przechodząc od bieguna ujemnego do dodatniego (wzrost potencjału), to SEM tego źródła zapisujemy ze znakiem plus. Natomiast, jeśli przechodząc od bieguna dodatniego do ujemnego (spadek potencjału) to SEM zapisujemy ze znakiem minus. Jeśli napotykamy opór elektryczny, np. w postaci rezystora, to (zgodnie z I prawem Ohma) iloczyn jego rezystancji (oporności) i natężenia prądu przez niego płynącego zapisujemy ze znakiem plus, gdy prąd płynie przeciwnie do kierunku obchodzenia oczka (wzrost potencjału), a ze znakiem minus, gdy zgodnie z kierunkiem wędrówki po oczku (spadek potencjału).

Warto zwrócić uwagę, że drugie prawo Kirchhoffa dla połączenia równoległego dwóch oporników (rys. 5b):

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

prowadzi do użytecznego związku:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (9)$$

z którego wynika, że natężenia prądów płynących przez dwa oporniki połączone równolegle są odwrotnie proporcjonalne do wartości oporów tych oporników

Opór zastępczy szeregowego i równoległego połączenia oporników

Rzeczywiste obwody elektryczne stanowią kombinację oporników połączonych szeregowo lub równolegle (co często nazywane jest połączeniem mieszanym). Szeregowe połączenie oporników (rys. 5a) jest to takie połączenie, w którym koniec pierwszego opornika połączony jest z początkiem następnego opornika w tzw. szereg oporowy. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa, natężenie prądu płynącego przez każdy z oporników połączonych szeregowo jest takie samo i wynosi I . Na każdym oporniku następuje spadek napięcia, a więc napięcie elektryczne między końcami szeregu oporników jest równe sumie spadków napięć na poszczególnych opornikach, co można zapisać:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (10)$$

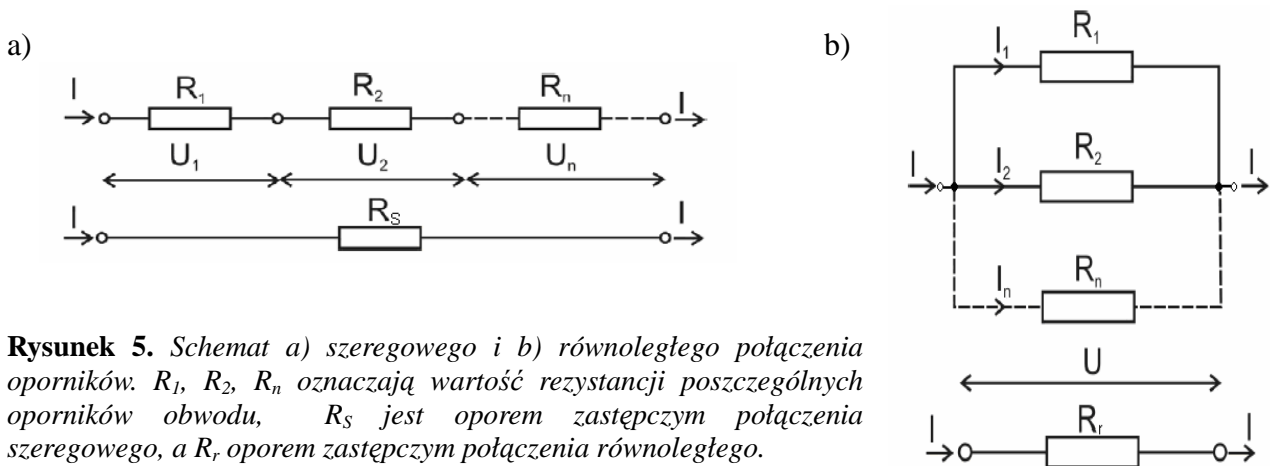
Jeśli skorzystamy z pierwszego prawa Ohma (przekształconego do postaci $U=IR$) to wzór powyższy przyjmie postać:

$$IR_s = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n, \quad (11)$$

gdzie R_s jest oporem zastępczym układu. Dzieliąc obie strony tego równania przez I , otrzymujemy:

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (12)$$

Opór zastępczy szeregowo połączonych oporników jest równy sumie algebraicznej ich rezystancji.



Rysunek 5. Schemat a) szeregowego i b) równoległego połączenia oporników. R_1, R_2, R_n oznaczają wartość rezystancji poszczególnych oporników obwodu, R_s jest oporem zastępczym połączenia szeregowego, a R_r oporem zastępczym połączenia równoległego.

W przypadku równoległego połączenia oporników (rys. 5b) spadek napięcia na każdym oporniku jest taki sam i jest równy spadkowi napięcia U na rezystancji zastępczej R_r . Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa, natężenia prądów płynących przez poszczególne oporniki sumują się do wartości natężenia prądu wpływającego do tego układu (rys. 5b), co można zapisać w postaci:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (13)$$

Wykorzystując pierwsze prawo Ohma (przekształcone do postaci $I = \frac{U}{R}$) możemy powyższe równanie zapisać jako:

$$\frac{U}{R_r} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}. \quad (14)$$

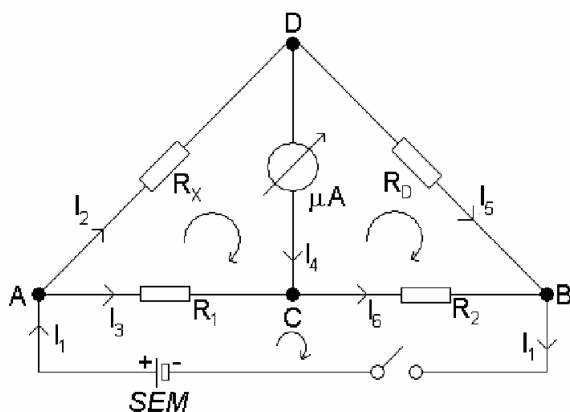
Dzieląc obie strony przez U , otrzymujemy:

$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}, \quad (15)$$

Odwrotność oporu zastępczego R_r równolegle połączonych oporników jest równa algebraicznej sumie odwrotności rezystancji poszczególnych oporników.

Pomiar oporu elektrycznego w układzie mostka Wheatstone'a

Mostek Wheatstone'a jest układem czterech oporników połączonych w czworobok oraz czułego galwanometru (tutaj mikroamperomierz) i źródła zasilania napięciem stałym włączonych w jego przekątne (rys. 6). Pozwala na precyzyjny pomiar oporu bez konieczności pomiaru napięcia i natężenia prądu. Układ ten może znajdować się tylko w jednym z dwóch stanów: albo $U_{CD} = 0$ i przez galwanometr prąd nie płynie (mówimy, że mostek jest zrównoważony), albo $U_{CD} \neq 0$ i w gałęzi CD płynie prąd (mostek jest niezrównoważony). Galwanometr jest tu tylko wskaźnikiem przepływu prądu w gałęzi CD, pozwalając odróżnić stan zrównoważonego mostka od stanu niezrównoważonego.



Rozważmy przypadek zrównoważonego mostka Wheatstone'a. Wtedy węzły C i D mają ten sam potencjał (są równoważne), więc:

$$I_4 = 0, \quad I_2 = I_5 = I_D, \quad I_3 = I_6 = I_C,$$

gdzie I_C i I_D oznaczają natężenie prądu płynącego przez węzeł C i D odpowiednio. Korzystając ze wzoru (9) możemy zapisać:

$$R_X I_D = R_1 I_C \quad (\text{dla oczka ACD}) \quad \text{i} \quad R_D I_D = R_2 I_C \quad (\text{dla oczka CBD}),$$

z czego wynika, że:

$$\frac{R_X}{R_D} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (16)$$

Rysunek 6. Schemat mostka Wheatstone'a z zaznaczonymi kierunkami przepływu prądów. Litera A, B, C i D oznaczają węzły sieci elektrycznej. R_1 i R_2 oznaczają oporniki o ustalonej wartości oporu, R_D opornicę dekadową, a R_X badany opornik.

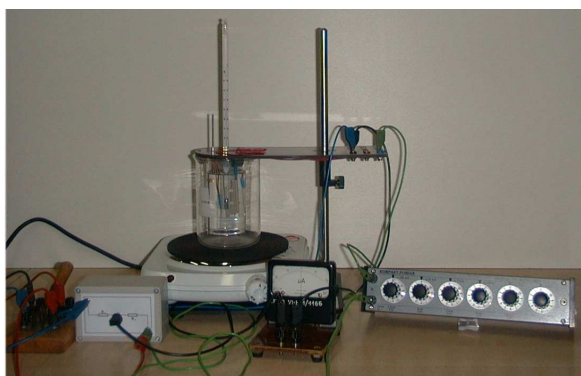
Zastosowanie praw Kirchhoffa do układu mostka Wheatstone'a prowadzi do równania (16), które pozwala na wyznaczenie wartości nieznanego oporu z zależności:

$$R_X = \frac{R_1}{R_2} R_D. \quad (17)$$

Jeżeli opory R_1 i R_2 mają taką samą wartość to opór badanego opornika jest wprost równy oporowi nastawionemu na opornicy dekadowej przy zrównoważonym mostku.

2. Przebieg pomiarów

Układ doświadczalny



W skład układu doświadczalnego (fot. 1) wchodzi: zestaw trzech oporników wykonanych z różnych materiałów (grafitu, niklu i platyny), dwa oporniki o tej samej rezystancji połączone ze sobą szeregowo (oporniki drutowe $10\ \Omega$; dokładność 5%), opornica dekadowa, termometr rtęciowy, multimetr, klucz i/lub komutator. Zasilanie ze źródła napięcia stałego 1.5 V. Badane oporniki zanurzone są w zlewce z olejem parafinowym, która umieszczona jest w kąpielii wodnej podgrzewanej na maszynie elektrycznej z termostatem.

Fotografia 1. Układ doświadczalny do badania temperaturowej zależności oporu.

Przebieg doświadczenia

Doświadczenie rozpoczynamy od pomiaru oporu dostępnych oporników za pomocą multimetru (wykorzystując funkcję omomierza). Pomiar oporu powtarzamy w układzie mostka Wheastone'a. Zestawiamy połączenie szeregowo, a następnie równoległe dwóch wybranych oporników i dokonujemy pomiaru oporu tych połączeń. W przypadku połączenia równoległego dokonujemy pomiarów dla oporników o porównywalnych oporach oraz o oporach znacznie się różniących (np. ok. $10\ \Omega$ i $100\ \Omega$). Sprawdzamy zgodność uzyskanych wyników z przewidywanymi na podstawie równań (12) i (15). Przeprowadzamy analizę niepewności pomiarowych.

Drugą część doświadczenia rozpoczynamy od wybrania dwóch oporników, dla których badana będzie zależność ich oporu od temperatury. Najlepiej, wybrać oporniki o porównywalnym oporze, gdyż dzięki temu unikamy zmian rzędów rezystancji na opornicy dekadowej. Usprawnia to przebieg pomiarów i znacznie zmniejsza prawdopodobieństwo uszkodzenia mikroamperomierza przez nagły skok wartości natężenia prądu przepływającego przez niego w przypadku, gdy mostek jest nie zrównoważony. Następnie należy połączyć układ mostka Wheastone'a (schemat na rys. 6). Zlewkę zewnętrzną (o pojemności 0.5 l) napełnić wodą destylowaną do około $\frac{3}{4}$ wysokości (większa ilość podczas wrzenia będzie się wylewać na powierzchnię grzejną maszyny). Po przedyskutowaniu szczegółowego planu pomiarów z asystentem prowadzącym ćwiczenie należy, powoli ogrzewając układ, dokonywać pomiaru oporu badanych oporników (na przemian) co kilka stopni. Aby usprawnić proces chłodzenia można wynurzyć zlewkę wewnętrzną nad powierzchnię wody i użyć wiatraka.

3. Opracowanie wyników

Należy wykonać wykres zależności oporu od temperatury dla badanych oporników nanosząc wszystkie punkty pomiarowe (najlepiej w jednym układzie współrzędnych, używając różnych symboli dla różnych materiałów oraz wersji symbol pełny i symbol pusty dla temperatury rosnącej i malejącej). Można wykonać wykres oporu zredukowanego R/R_0 od temperatury względnej $(T-T_0)$ - w tym przypadku należy zwrócić szczególną uwagę na poprawną propagację niepewności pomiarowych (!). Jeżeli pomiar oporu wykonywany był w tych samych temperaturach zarówno

podczas ogrzewania jak i chłodzenia układu należy rozważyć zasadność wzięcia do rozważań wartości średniej R w danej temperaturze. Dla kilku punktów nanieść prostokąty niepewności pomiarowych. Ocenic czy z powodu błędów grubych nie należy pewnych punktów odrzucić z dalszego opracowania (tj. sprawdzić czy punkty wyraźnie odbiegające od spodziewanej zależności liniowej to wynik złego wpisania danych z tabeli pomiarowej, czy też innych czynników, spróbować ustalić, jakich i czy da się takie błędy skorygować czy też punkty te należy, po podaniu uzasadnienia, zaniedbać w dalszym opracowaniu). Do punktów eksperymentalnych dopasować prostą metodą regresji liniowej (klasycznej czy ważonej- wybór uzasadnić) i na bazie wartości parametrów prostej i ich niepewności wyznaczyć temperaturowy współczynnik oporu właściwego α i jego niepewność. Następnie wyznaczyć wartość temperaturowego współczynnika oporu właściwego α i jego niepewność na podstawie pomiarów oporu w dwóch dobrze wystabilizowanych temperaturach (zazwyczaj jest to temperatura pokojowa i temperatura wrzenia wody). W podsumowaniu porównać z wartością tablicową i ze sobą wartości współczynnika α wyznaczone w/w metodami oraz skomentować uzyskane wyniki. Omówić czynniki, które mogły mieć wpływ (jaki?) na jakość uzyskanych wyników.

Pierwiastek	α [1/stopień]
węgiel	-0,0005
nikiel	0,006
platyna	0,003

Tabela 1. Temperaturowy współczynnik oporności właściwej dla wybranych materiałów [46].

Spis literatury

- [44] A. Magiera, *I Pracowania Fizyczna*, Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2006.
 [45] A. K. Wróblewski, A. A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki, tom II*, PWN, Warszawa 1991.
 [46] M. Jeżewski, J. Kalisz, *Tablice wielkości fizycznych oraz pomocnicze tablice matematyczne*, PWN, Warszawa 1957.