

Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Jagiellońskiego

Zajęcia laboratoryjne w I Pracowni Fizycznej dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych z rozszerzoną fizyką.

PF11- Dynamika bryły sztywnej.

Zagadnienia: (program nauczania fizyki w liceum na poziomie rozszerzonym) bryła sztywna, moment bezwładności, dynamika ruchu obrotowego, maszyny proste: kołowrót, blok nieruchomy.

Ciało fizyczne, którego elementy (punkty materialne) nie mogą się względem siebie przemieszczać nazywamy **bryłą sztywną**. Gdy taka bryła obraca się wokół ustalonej osi, to każdy jej punkt (poza znajdującymi się na osi obrotu) porusza się po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. Środki wszystkich tych okręgów leżą na osi obrotu. Promienie wodzące punktów bryły zakreślają w zadanym przedziale czasu takie same kąty, a więc prędkość kątowna i przyspieszenie kątowe są dla wszystkich punktów bryły jednakowe.

Do opisu ruchu obrotowego bryły sztywnej służą: moment bezwładności, moment siły, moment pędu.

Moment bezwładności I jest miarą bezwładności ciała w ruchu obrotowym. Moment bezwładności odnosi się do wybranej osi obrotu i jest związany z rozkładem mas wokół niej.

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

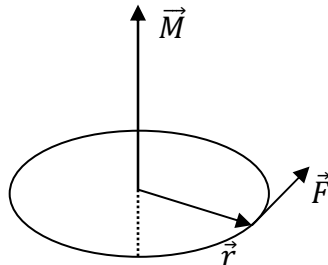
W powyższym wzorze m_i oznaczają masy fragmentów ciała oddalonych od osi obrotu o r_i .

Twierdzenie Steinera. Moment bezwładności I bryły sztywnej względem dowolnej osi O' jest równy sumie momentu bezwładności I_O tej bryły względem osi O (równoległej do danej osi O' i przechodzącej przez środek masy bryły) oraz iloczynu masy bryły m i kwadratu odległości d między osiami O i O' .

$$I_{O'} = I_O + md^2$$

Momentem siły \vec{M} względem ustalonej osi nazywamy **iloczyn wektorowy** wektora \vec{r} (ramienia siły) oraz wektora \vec{F} (siły działającej na tym ramieniu).

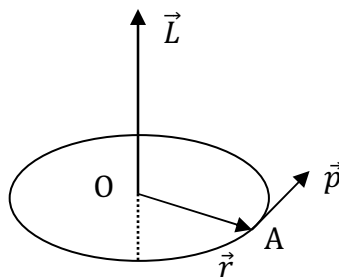
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Kierunek wektora momentu siły ma kierunek osi, wokół której obraca się bryła sztywna; zwrot wektora momentu siły jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej.

Moment pędu \vec{L} punktu materialnego A względem punktu O na osi obrotu, jest zdefiniowany jako iloczyn wektorowy wektora \vec{r} (o początku w O, a końcu w A) oraz wektora pędu \vec{p} (punktu o masie m).

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Moment pędu bryły sztywnej obracającej się względem ustalonej osi obrotu jest równy iloczynowi momentu bezwładności tej bryły względem osi obrotu i prędkości kątowej $\vec{\omega}$.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Przyspieszenie kątowe średnie $\vec{\epsilon}$ jest to zmiana prędkości kątowej $\vec{\omega}$ w jednostce czasu Δt .

Wartość przyspieszenia kątowego średniego:

$$\epsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

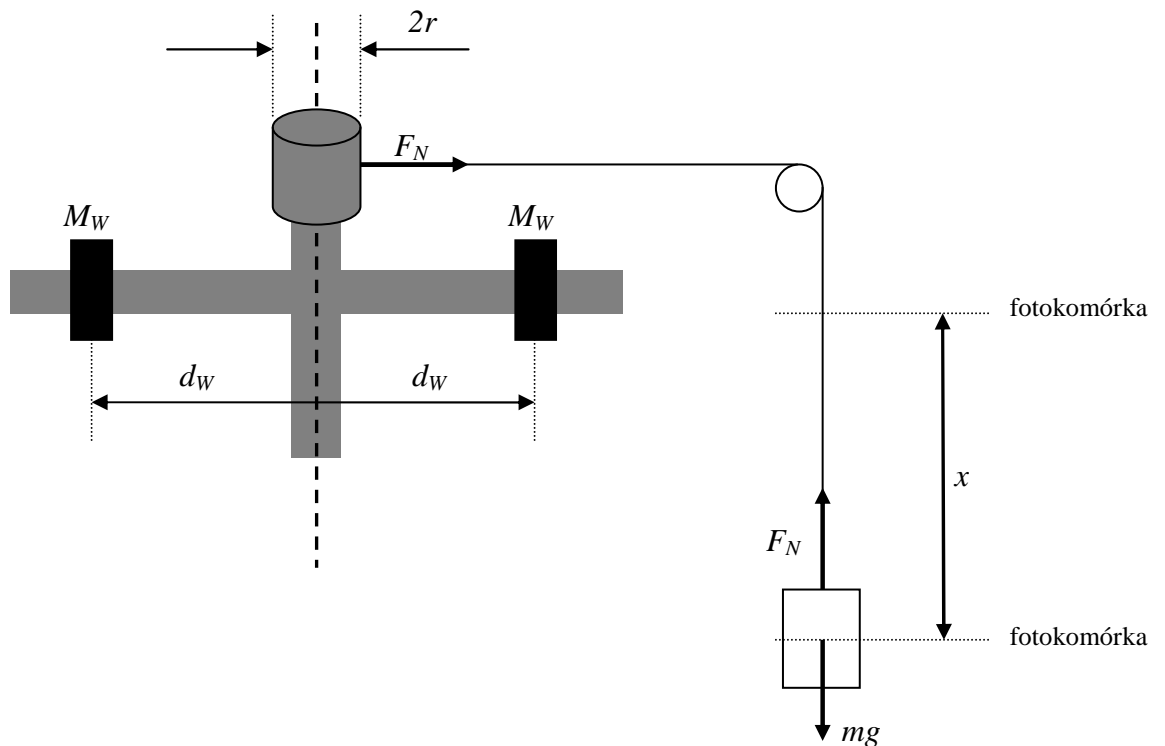
II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej.

Jeżeli wypadkowy moment sił działających na bryłę sztywną jest różny od zera, to bryła ta jest w ruchu obrotowym z przyspieszeniem kątowym wprost proporcjonalnym do wypadkowego momentu siły i odwrotnie proporcjonalnym do momentu bezwładności bryły.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$$

Układ doświadczalny.

W doświadczeniu będziemy badać tak zwane **wahadło Oberbecka**. Jest to obracający się wokół swojego środka pręt, do którego dołączono dwa ramiona. Na obu ramionach, w takich samych odległościach (d_W) od osi obrotu zamocowane są identyczne ciężarki w kształcie walca o masach M_W . Na osi wahadła o promieniu r nawinięta jest nić, która przechodzi przez blok, a zakończona jest uchwytem na obciążenie o masie m . Obciążenie to porusza się (pod wpływem siły ciężkości) ruchem postępowym z jednostajnym przyspieszeniem o wartości a , zgodnie z równaniem ruchu: $mg - F_N = ma$ (gdzie siła naciągu nici to F_N). Elektroniczne bramki (wyposażone w fotokomórki) mierzą czas t , jaki zajmuje obciążeniu przebycie drogi x .



Pierwszym zadaniem jest wyznaczenie momentu bezwładności obracającego się układu. Oznaczmy przez I_x moment bezwładności wahadła Oberbecka (bez ciężarków). Ciężarki mają kształt walców o średnicy $2R$ i wysokości H – należy te wielkości zmierzyć przy użyciu suwmiarki. Moment bezwładności walca względem osi przechodzącej przez środek masy (który wypada w połowie wysokości tego walca) i prostopadłej do osi symetrii walca wynosi $M_W \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2 \right)$. Stosując twierdzenie Steinera obliczamy moment bezwładności jednego walca względem osi obrotu wahadła Oberbecka: $M_W \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2 + d_W^2 \right)$, a ponieważ mamy dwa takie ciężarki, moment bezwładności całego układu wynosi:

$$I = I_x + 2M_W \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2 + d_W^2 \right)$$

Na naszą bryłę działa moment siły o wartości rF_N (należy suwmiarką zmierzyć średnicę $2r$ pręta, na który nawinięta jest nić) nadając jej przyspieszenie kątowe o wartości $\varepsilon = \frac{rF_N}{I}$. Ponieważ przyspieszenie a ruchu postępowego opadającego obciążenia powiązane jest z przyspieszeniem kątowym bryły sztywnej zależnością $a = \varepsilon \cdot r$, otrzymujemy wzór na przyspieszenie układu:

$$a = \frac{r^2 F_N}{I} = \frac{r^2 (mg - ma)}{I}$$

i po przekształceniach:

$$a = \frac{mgr^2}{I + mr^2}$$

oraz po podstawieniu obliczonego momentu bezwładności:

$$a = \frac{mgr^2}{I_x + 2M_W \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2 + d_W^2 \right) + mr^2}$$

Przy pomiarach czasu przelotu bardzo ważne jest takie wybranie położenia początkowego szalki z ciężarkiem, aby po jego starcie natychmiast uruchamiała się fotokomórka. Dzięki temu spełniona jest zależność $x = \frac{1}{2}at^2$ (gdzie x jest odległością pomiędzy fotokomórkami) i można wyprowadzić wzór:

$$t^2 = \frac{2x \left[I_x + 2M_W \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2 + d_W^2 \right) + mr^2 \right]}{mgr^2}$$

pozwalający sprawdzić zależność t^2 od d_W^2 (jest to zależność liniowa!).

Wykonanie pomiarów:

- Wyznacz masy M_W ciężarków w kształcie walca i masę m obciążnika.

$$M_W = \dots\dots\dots [\text{kg}]$$

$$m = \dots\dots\dots [\text{kg}]$$

- Zmierz suwmiarką średnicę $2R$ i wysokość H ciężarków.

$$R = \dots\dots\dots [\text{m}]$$

$$H = \dots\dots\dots [\text{m}]$$

- Zmierz suwmiarką średnicę $2r$ pręta, na który nawinięta jest nić.

$$r = \dots\dots\dots [\text{m}]$$

- Zamontuj ciężarki w odległościach d_W od osi obrotu

$$d_W = \dots\dots\dots [\text{m}]$$

- Ustaw bramki z fotokomórkami w odległości x od siebie.

$$x = \dots\dots\dots [\text{m}]$$

- Nawiń nić i przytrzymaj szalkę z obciążnikiem tuż nad pierwszą bramką.
- Wykonaj pomiary czasu przelotu t dla różnych odległości d_W .

| t [s] | t^2 [s ²] | d_W [m] | d_W^2 [m ²] |
|---------|-------------------------|-----------|---------------------------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

- Wykonaj wykres zależność t^2 od d_W^2 . Czy otrzymana zależność jest liniowa?
- Oblicz I_x czyli moment bezwładności wahadła Oberbecka bez ciężarków.

$$I_x \text{ obliczysz przekształcając wyrażenie } t^2 = \frac{2x[I_x + 2M_W(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2 + d_W^2) + mr^2]}{mgr^2}.$$

Podstaw do przekształconego wyrażenia wybrane wartości t^2 oraz d_W^2 .